Tentamen Lineaire Algebra 1, 30 januari 2009

Het tentamen bestaat uit 6 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. U moet de antwoorden beargumenteren. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de rang van A.

b. Bepaal de dimensie van de nulruimte $N(A)$ van A.

c. Bepaal de oplossingsverzameling van het homogene stelsel $Ax = 0$.

d. Laat de vector b gegeven zijn door

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $Ax = b$.

2. Stel dat A een $n \times n$ matrix is.

a. Leg uit wat we bedoelen met de uitspraak dat A niet-singulier is, en leg uit wat we verstaan onder de inverse A^{-1} van A.

b. Stel A niet-singulier. Stel dat A^{-1} de inverse is van A. Stel B een $n \times n$ matrix. Toon aan: als $AB = I$ dan geldt $B = A^{-1}$.

c. Stel $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Toon aan: als A niet singulier is dan is aA niet-singulier en $(aA)^{-1} = \frac{1}{a}A^{-1}$.

d. Toon aan: als A niet-singulier is dan heeft het stelsel vergelijkingen $Ax = 0$ alleen $x = 0$ als oplossing.

3. Definieer de lineaire afbeelding L van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^3$ door

$$L(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de matrix van L ten opzichte van de standaard-bases in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$.

b. Bepaal de kern $\ker(L)$ van L.

c. Bepaal een basis van de range $L(\mathbb{R}^2)$ van L.

4. Laat $\mathbb{R}^{n\times n}$ de vectorruimte zijn van alle $n \times n$ matrices met reële coefficienten. Voor een gegeven matrix $A = (a_{ij})$ definieren we het *spoor* van A door $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. Laat N de deelverzameling zijn van $\mathbb{R}^{n\times n}$ van alle matrices A zodat $\mathrm{tr}(A) = 0$.

a. Toon aan dat N een deelruimte is van $\mathbb{R}^{n\times n}$.

In de rest van deze opgave, neem aan dat $n = 2$.

b. Bepaal een basis E van N. Wat is de dimensie van N?

c. Bepaal een basis F van $\mathbb{R}^{2\times 2}$ zodat $E \subset F$.

5. Stel $\mathcal{V}$ een vectorruimte, en stel (x, y) een inproduct op $\mathcal{V}$.

a. Schrijf de (vier) eigenschappen op waaraan een functie $(x, y) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ moet voldoen opdat het een inproduct op $\mathcal{V}$ is.

b. Stel dat $\mathcal{W}$ een deelruimte is van $\mathcal{V}$. We definieren het *orthogonale complement* $\mathcal{W}^\perp$ *van* $\mathcal{W}$ door:

$$\mathcal{W}^\perp := \{x \in \mathcal{V} \mid (x, y) = 0 \text{ voor alle } y \in \mathcal{W}\}.$$

Bewijs dat $\mathcal{W}^\perp$ een deelruimte is van $\mathcal{V}$.

c. Bewijs dat $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{0\}$.

6. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal het karakteristieke polynoom van A.

b. Bepaal de eigenwaarden van A.

c. Bepaal de eigenvectoren van A

c. Ga na of A diagonaliseerbaar is.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 15
Vraagstuk 2: 15
Vraagstuk 3: 15
Vraagstuk 4: 15
Vraagstuk 5: 15
Vraagstuk 6: 15